1　2022 年合同教育全道研究集会　4. 数学教育分科会報告　　成田　収

2022 年 11 月 12 日（土）合同教育研究集会数学教育分科会が開かれた。分科会には 11 名が参加した。レポートは 6 本であった。

分科会は、完全オンラインで行われた。
レポートは、教育における遊びの意味の探究、中学校支援学級における算数教育の課題の探究、高等学校で今年から始まった 3 観点評価の実態、フランスの高大接続システムであるバカロレアの研究、数学探究課題としての巨大数の提案、幾何学教育にベクトル積の導入の提案、など多様なテーマについて報告検討された。

また、参加者中現役教員が少なかったことはここ数年続いている特徴である。昨年、このことについて、

> 学校現場の余裕の無さを表しているのだろうか。あるいは、組合活動の中に、教科教育研究の占める重要性の比重が軽くなってきたのであろうか。あるいは、教科教育における教師の裁量権が奪われてしまったことが原因なのであろうか。

と書いたが、その後、このことについての分析は加えられていない。合同教研全体としての研究課題ではないだろうか。

COVID-19 の蔓延で、質の異なる多忙さと、人と人がコミュニケーションをとること自体に困難が伴う中、オンラインでこのような研究会を持つことができることの意味は大きい。民主的な、子どもを大切にする教科教育のあり方を議論する場としての合同教研教科別分科会の場を継続的に設けていくことの意義は大きいと思われる。今後とも、この場を発展させていきたいものである。

今年寄せられたレポートは次の 6 本であった。

1.1　レポート名一覧

1	「探求とは何か　～幼児教育の「遊び」から「探求」を探る～」	酒井　義信
2	「量をつかまえろ」	大竹　宏周
3	「高校にも観点別評価がやって来た！」	清水　貞人
4	「バカロレアに見る仏国数学教育の変貌」	渡邊　勝
5	「巨大数のつくり方　～アッカーマン数とグラハム数～」	真鍋　和弘
6	「四元数とベクトル解析　～ベクトル積の導入からロドリゲスの公式へ～」	成田　収

一つ一つ、大変価値あるレポートであったと考える。以下、各レポートとそこで行われた検討の内容を紹介する。

2　合研数学教育分科会レポートについて

1「探求とは何か　～幼児教育の「遊び」から「探求」を探る～」　酒井　義信

本レポートは幼児教育が一斉保育から「遊び」中心の保育に変わってきた経過に鑑みながら、人間の教育における「遊び」の要素である主体的活動としての「探求」の重要性について考察したものである。今年から高校数学の指導要領に加えられた「総合的な探求の時間」が重要な意味を持つものであると同時に、これを「教える」授業にしてしまうことの無意味さについての考察している。考察中、「人間は教えればできるようになることは誤解である」「『きちんと』教えることの弊害」「スモールステップの教育は何を生み出すか」「大学版きちんと教えるの蒙味」などの言葉で、現在流布している教育観への痛烈な批判があったため、議論は沸騰した。

面白い提起を含むレポートであった。

２「量をつかまえろ」　大竹　宏周

　このレポートは特別支援学級の「数学」教育における「数の指導」以前の問題として「量の指導」の重要性を実践的に明らかにしたものである。本レポートは、「数量」以前の体験としての概念獲得、言語獲得の重要性を提起している。

３「高校にも観点別評価がやって来た！」　清水　貞人

　このレポートは現在高校１年生までに強要されている観点別評価の実態報告である。評価の観点を１) 知識・技能、２) 思考力・判断力・表現力、３）主体的学習態度に分割し、３観点を同じ重みで合計したものを５４３２１の評定に換算するものである。本来分割できない評価の観点を無理に分割すること、そのことによる教員の事務作業の増大と煩雑さについて報告している。

　本レポートは非公開であるため詳細について知りたい方はレポーターに連絡をとっていただきたい。

４「バカロレアに見る仏国数学教育の変貌」　渡邊　勝

　本レポートはフランスの高大接続試験であるバカロレアの 2022 年からの変化と実際のバカロレアに使われた数学の問題の解析についての報告である。バカロレアの 2022 年の問題も、基本的で格調の高い問題で、日本の大学入試問題や高校の数学教育について考える上で、示唆に富むものである。

５「巨大数のつくり方　～アッカーマン数とグラハム数～」　真鍋　和弘

　本レポートは 20 世紀初頭のヒルベルトによる有限の立場による数学の基礎づけの提起に伴いあらわれた、有限と無限の間に存在する人間には到達不可能とも思える巨大数についての考察である。有限の範囲に無限とも思える巨大な数が手触りとともに感じられる報告であった。人が考えることができる「数」がこのような広がりを持つことを伝えるテーマとして、中学校、高等学校に限らず、一般市民対象の講座などで、ぜひ実践したいものだと思う。

６「四元数とベクトル解析　～ベクトル積の導入からロドリゲスの公式へ～」　成田　收

　このレポートはユークリッド幾何学における回転運動の重要性と、それを実現するために四元数から抽出されたベクトル積の重要性などについて考察したものである。この中で、高校で扱われる「ベクトル解析」はアメリカの物理学者ギッブスが 1881 年に提唱したのが最初であるという歴史も明らかにされている。

3　各レポートのやや詳細な紹介

1「探求とは何か　～幼児教育の「遊び」から「探求」を探る～」　酒井　義信

本レポートは幼児教育が一斉保育から「遊び」中心の保育に変わってきた経過に鑑みながら、人間の教育における「遊び」の要素である主体的活動としての「探求」の重要性について考察したもので、今年から高校数学の指導要領に加えられた「総合的な探求の時間」が重要な意味を持つものであると同時に、これを「教える」授業にしてしまうことの無意味さについての考察であった。考察中、「人間は教えればできるようになることは誤解である」「「きちんと」教えることの弊害」「スモールステップの教育は何を生み出すか」「大学版きちんと教えるの蒙味」などの言葉で、現在流布している教育観への痛烈な批判があったため、議論は沸騰した。面白い提起を含むレポートであった。

以下、レポートの主張について少しまとめます。

1989（平成元）年幼稚園教育要領が改訂され、それまで、教師主導で一斉に子どもにやらせることが一般的だった幼稚園教育を、子どもを主体とした、遊びを援助する保育への転換が行われた。それまで小学校化の傾向があった幼児教育を原点に返す方向に転換した。

これと同時に、1989 年学習指導要領では、小一プロブレムを解消するべく、小学校に生活科が導入された。これは、遊びが学びの中心である幼児教育から、小学校における教師主導の教え込みによる教科学習への急激な変化の弊害を解消することが目的であった。生活科においては、児童が主体的に具体的かつ総合的な活動を通して知識や習慣を身につけることが目指された。

幼児教育の「遊び中心の保育」の変革する際には、子どもに探究（遊び）をしてもらうために教師は何をすればよいかがとても大きな問題となった。教師（保育者）は、子どもの遊びの状況から環境を工夫し、遊びのモデルになったり、共感者になったりして子どもの遊び（探究）を援助するように変わる必要があった。要するに、教師（保育者）は指導者ではなく、子どもの探究の援助者として位置づけられる。

小学校での生活科創設にあたっては、全国の校長会から「教科書がなければ指導できない」「評価はどうする」との意見が出されて、本来の探究の時間からトーンダウンされたという。同じくその後創設された「総合的な学習の時間」も本来的な「探究」にはなっていない。

そこで、今回高等学校に新設された「総合的な探究の時間」も「学び」（学習）へのイメージが違えば、また同じようなことを繰り返すのではないだろうかと危惧される。

探究的な学び

古くから、学校教育などでは、知識は教師に教えてもらい蓄積されていくものだと考えられていました。しかし時代を経るとともに、知識は学習者が主体的に参加して構築していくものだという「構成論」の考えが出されるようになってきました。知識は教えられるものではなく、感覚を通して入ってくる情報を今までの経験からみずから取捨選択して取り入れるものだという新しい認識論です。

『私たちはどう学んでいるのか』鈴木浩昭著ちくまプリマー新書

『学びとは何かー探究人になるために』今井むつみ岩波新書

などに記述があります。

その中では、

・「教えればできる」という素朴理論

・「きちんと」教えるの弊害ースモールステップの教育は何を生み出すか

・大学版「きちんと」教えるの蒙昧ー **3** つのポリシー

などについて述べられています。

また、なぜ旧態依然のような教育がわが国で行われるのかについては、以下の２冊に述べられています。
『教育と国家』　高橋哲哉　講談社現代新書
『機会不平等』　斎藤貴男　文春文庫

数学教育とのかかわり
『形而上学（上)』アリストテレス　出隆訳　岩波文庫の冒頭にはつぎのように書かれています。
「すべての人間は、生まれつき、知ることを欲する。その証拠としては感覚知覚（感覚）への愛好があげられる。というのは、感覚は、その効用をぬきにしても、すでに感覚することそれ自らのゆえにさえ愛好されるものだからである。」
乳幼児の遊び（学び）を観察していると、まさにこの言葉が的を得ていると考えられます。その遊び（学び）によって情報を取捨選択しているのですから、私たちの学びは知ることを欲することが基礎になっていると思います。
算数の教科書は「量」についての学びが少なく、最初から「数」が登場し、「数え主義」「暗記主義」といわれ、教え込みが中心である。そのことの源のひとつに、プラトンとアリストテレスの考えの違いが影響していると考えられる。
「量」に基づく初等数学教育の構成が重要である。
上越数学教育研究，第 25 号，上越教育大学数学教室，2010 年，pp.11-18
「アリストテレス的数学観に立つ数学教育学研究の幾つかの方向性」高橋等上越教育大学
takahashi10.pdf(juen.ac.jp)

数学教育においても、J．ピアジェの構成論による教材作成や指導法が取り入れられてきました。子どもは、自分の興味・関心によって活動を繰り返して、シェーマといわれる前概念を繰り返し構成することを通してより高い概念として認知しているとの考えからです。そしてさらに新しい学び論（認識論）「探究的な学び」が注目されるようになっています。

今年度から高等学校に導入された「総合的な探求の時間」についても、探求するテーマを与えられるのではなく、主体的に自分の問題としてテーマを設定し、教えられるのではなく、自ら求めて、遊びの要素としての探求をすることに意味があるのであって、「探求」を教える授業になってしまっては意味がないと考えられる。
「人間は教えればできるようになることは誤解である」「「きちんと」教えることの弊害」「スモールステップの教育は何を生み出すか」「大学版きちんと教えるの蒙昧」などのキーワードに注意しながらこの時間を充実させることが大切である。

という内容のレポートでした。

議論：スモールステップを弊害と見るのは暴論ではないか
小学校などの授業においては、すべての子供にわかるように教えるためには、認識の過程をスモールステップに分けることは大切で、これを否定してしまっては、小学校の数学教育は成立しない。わかりやすく教えることを否定すれば、多くの落ちこぼしを生むのではないか。
という点が指摘されました。
これに対して、いくらスモールステップに分けて思考にギャップがないような体系を作って教えたとしても、もともと、そのテーマを自分の問題として知りたいという動機がなければ、その教育課程はその学習者にとって苦痛なもので、ギャップがなければないほど、退屈でつまらないものになってしまう恐れがある。謎もない、

ワクワクする未知の現象もない、スモールステップの連続は、知的好奇心を呼び起こさず、学習意欲を削いでしまう。

　また、落ちこぼしというのは、その学齢の子どもにその時点で必ず知識として獲得しなければならないという規制の枠の中で考えられるものであり、もともと子どもが探究的に物事を理解していくときには、そのような枠を取り外して考えなければならないのではないか。

　などと言う点が議論されました。

　筆者としては、この問題は、数学教育のどの場面で、探究的遊びが必要で、どの部分でスモールステップに分解解説することが必要なのかなど、少しきめ細やかな議論が必要であると感じます。

　いずれにしろ、このレポートは、人間が学ぶことについて、遊びの要素がいかに大切なのかということ、学ぶとはどういうことなのか、学ぶべき知性とはどのようなものなのかなど、学びについての、本質的なテーマを投げかけているように感じます。今後大いに研究されるべきテーマではないかと思います。

2「量をつかまえろ」　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　大竹　宏周

このレポートは特別支援学級の「数学」教育における「数の指導」以前の問題として「量の指導」の重要性を実践的に明らかにしたものである。本レポートは、「数量」以前の体験としての概念獲得、言語獲得の重要性を提起している。

中学校の知的学級における、ある生徒への数学教育実践記録である。
前年度の記録では、すごろくゲームで、声を出して数える、7 戻る、10 進むこと、数字のボードを使って 10 までの足し算ができる、ということであった。
実際に担当してみると、数唱はできるが、実は、足し算はできないこと, 数の大小がよくわかっていないことがわかった。
最初の目標を 5 の分解合成とした。
これも無理とわかり、量概念の獲得ができていないと考え、量と数詞、数唱を結びつけることを最初の目標とした。
3 個までの物体については見ただけで、数詞、数唱とも可能であった。4 以上は数えなければできなかった。練習を積むと、4 はわかるようになったが、5 は難しかった。
10 までの数字は読めたので、10 までのブロックの図のカードをみせて、いくつかを問うことを繰り返した。これを繰り返すうちに、10 までの数のタイル図についても見ただけでその数を答えられるようになった。
次に、数字とタイル図の対応の指導をした。数字のカードを見せ、同じ数のタイル図のカードを探す。逆に、タイル図のカードを見せ同じ数の数字カードを探す。時間をかけることによって、これも可能となった。

次に取り組んだのは、数の大小の学習である。
明らかに数量差のあるブロックの大小はわかる。しかし、微妙な差のある 2 つのブロックの間の大小については難しい。そういう場合は、１：１の対応を使って大小比較した。
次の段階は、ブロック図のカードで大小比較。つまづいたときは、ブロックに戻って確認。
さらに次の段階では数字の大小比較。これも、つまづいたときは、ブロック図や、ブロックに戻って確認。これらの課題もクリヤーできた。

さらに、次の課題は、「何番目」がわかるようになること。
この課題については、数の大小を織り交ぜながら「何番目」の学習を始めた。
この段階で、数学ではないが、国語の問題として、語彙が少なく、反対語がわかっていないことが課題として明らかになった。そこで、反対語の学習に取り組んだ。その成果が出始めると、「何番目」の課題が自然と解決できていた。
このことは、語彙と数の結びつきが希薄だったものが、つながったためではないかと推察しているが、どのようにつながるとどのような現象として現れるのかという分析が必要ではないかと思われる。

量にこだわって、指導してきたが、先日、2 個のリンゴの大きさを比べさせたところ、これができなかった。数えられる量と大きさは別物なのか、あるいは言葉の定義が曖昧なのかと考えているという、レポートであった。

討議では、特別支援教育では、幼児教育における幼児の数認識の発達の知識が応用可能と思われるので、過去の研究を参照する必要があるのではないか、遠山啓の　教師のための数学入門　などが参考になるのではないか、などと言う指摘もされた。

遠山は、教師のための数学入門の第 3 章　幼児の数概念　において、数詞と数概念が別物であることを指摘し、
数概念について、ファインの考察を紹介している。
数概念を獲得するとは
1:1 対応に対する不変性
順序に対する不変性
分割に対する不変性
の 3 つがわかることが条件となるというものである。

また、ピアジェの　幼児における数の発生　における考察を引用している。
ここで、ピアジェは幼児の認識の発達において、不変性がいつ頃、どの順番で獲得されるのかを研究している。

最初は、連続領における分割の不変性を研究している。この結果、4 歳では入れ物の形状や個数によって同じ液体でもその量が変化すると認識され、分割による不変性は認識されなかったという。ほぼ確実になるのは 6 歳から 7 歳にかけてであるという。

では、おはじきの個数のような分離量ではこのようなことはないのではないかというと、そうでもなく、やはり、全体の形状によって影響を受けるという。ある年齢の幼児では、平たい容器と細長く高さのある容器に、おはじきを交互に 1 つずつ入れていった場合、見た目で高く見える細長い　容器に入っているおはじきの量のほうが多いと考える子どもが多数であるという。

１：１対応の不変性についても、4 歳では認識できないものが 5 歳 8 ヶ月になると、難なく認識するようになる。順序について 1：1 対応を含みながら不変性を確実に認識するのはさらに年齢が高く 7 歳ころになってからである。

また、遠山は同じ本の第 8 章　幼児の量概念　で
ピアジェの幼児の連続量の認識の発達に関する研究について紹介している。
そこでは、物質の保存、重さの保存、体積の保存についての認識の発達について研究されている。
幼児のこれらの量に対する認識の発達については、４段階に分かれており、

第一段階（7 才～8 才）物質、重さ、体積の保存が認識されていない
第二段階（8 才～10 才）物質の保存のみが認識されている
第三段階（10 才～11 才または 12 才）物質と重さの保存が認識されている
第四段階（11 才～12 才）物質、重さ、体積の保存が認識されている

というのが結論であるようだ。
この結論を得るためにピアジェは詳細な観察実験をしている。
多少疑問なのは、どうやら、ピアジェは個々の幼児が、年齢が上がるにつれ、誰の助けもなしに自ら正しい認識に到達するというように考えている形跡があるということだ。

物質、重さ、体積の保存は科学的な認識であるから、人類の歴史的な実験と観察の積み重ねをもとにした知見の積み重ねによる認識である。すべての幼児が年令を重ねることによってのみその認識に到達するとは考えられない。事実、ピアジェ自身も、この研究の段階では、砂糖と水の混合による砂糖溶液の作成において、体積の保存について誤った認識を正しいと誤解しながら、これらの実験をしていたように思われる。

つまり、幼児の認識発達を、ピアジェの実験のみを基にして、研究することは誤りであり、ピアジェを基盤とする推論に基づく、遠山の「教師のための数学入門」を無批判に基礎資料とすることは危険であると思われる。

しかし、物質に関する量の認識に関する教育方法をどのように丁寧に作り、そこからどのように数概念に結びつけて行くのか、ということについて丁寧な研究が必要なことは確かなことと思われる。

本レポートは、その第一歩に当たる貴重な研究と感じる。

4「バカロレアに見る仏国数学教育の変貌」　渡邊　勝

本レポートはフランスの高大接続試験であるバカロレアの 2022 年からの変化と実際のバカロレアに使われた数学の問題の解析についての報告である。基本的で格調の高い問題で、日本の入試問題や高校の数学教育についても示唆に富むものである。

フランスの大学入試は、バカロレア試験のみである。
バカロレア試験は、高等学校卒業資格試験を兼ねている。

過去には、同世代人口に対するバカロレア合格者の比率は低かったが（1970 年 20 %)、バカロレア改革により、2019 年には 80 %になっている。

バカロレア合格者には大学入学の資格が与えられる。これは、大学への進学が平等であるべきという考え方の反映であり、高等教育へのアクセスの機会均が実現していると見ることができる。

しかし、一方で、大学での留年、中退は顕著に増加している。
2016 年に大学へ入学した学生のうち、30 %が中退し、41 %が留年している。進学したものは 29 %である。
3 年で卒業したものは 30 %である。

これが、社会的な問題となった。理由はいろいろあるが、その一つは、バカロレアの種類（科学系、経済社会系、文学系）による「序列化」の弊害である。その序列は　、科学系＞経済社会系＞文学系、の順に優秀であり、社会的に優遇されると考えられるようになったことである。日本の学歴信仰に似ている。

そのため、高等学校の生徒が、自分の適性や嗜好に関係なく科学系を選ぶ傾向が強くなった。フランスの高等学校であるリセにおいて、52 %が科学系を占めているが、科学系バカロレア取得者の 40 %が「大学で科学を勉強したくない」と答えているといい、学科への不適応を起こしている。このことが、学位の早期取得率を下げていると分析することができる。

そこで、2018 年に、国民教育省のミシェル・ブランケール大臣が、フランス・バカロレア改革の概要を公表した。

改革案は、次の三つの内容から成る。

第一にリセでのコース分けをなくし、バカロレアの科学系 (S)、文学系 (L)、経済・社会系 (ES) といった系統を廃止する。リセでは共通科目の 他、第 1 学年で専攻科目を 3 科目選択し、最終学年でうち 2 科目を学ぶ。

第二に試験科目の見直しを行い、現在は系統によって 10 から 15 ある最終試験の科目を大幅に削減し、全ての受験生にとって 4 科目にする 4 科目の内訳は、専攻科目 2 科目、哲学及び最終口頭試問 Grand Oral (グランオラル) である。

第三に筆記試験の比重を下げ、最終成績における評価の割合を試験 60 %、内申点 40 %とし、口頭試験とリセでの成績をより重視することにより

1 従来の系統と異なる組合せで専攻科目を選択でき、学習や進路の選択肢が増えること、

2 中等教育と高等教育の学習内容が関連付けられ大学での中退や留年が減ること、

3 試験科目の削減と筆記科目の比重低下により、リセにおいてバカロレア試験及びその前後の期間も試験勉強以外の教育機能が維持されることが期待される。

この新しいバカロレアの制度は、2021 年から適用される。

この改革の結果、バカロレアの問題の水準、傾向が変わったのかどうか。実際に数学の問題を調べてみた。
2022 年 5 月に行われた数学の問題をみる。かつての理系、経済社会系、文学系数学はなくなって「数学」となっている。ただし、数学の特別教育課程履修者向けの問題を取り上げる。

(1) 問題 4 問から 3 問を選んで回答する。各問 7 点で 21 点満点になる。

(2) 問題にそれぞれテーマが表示されている。

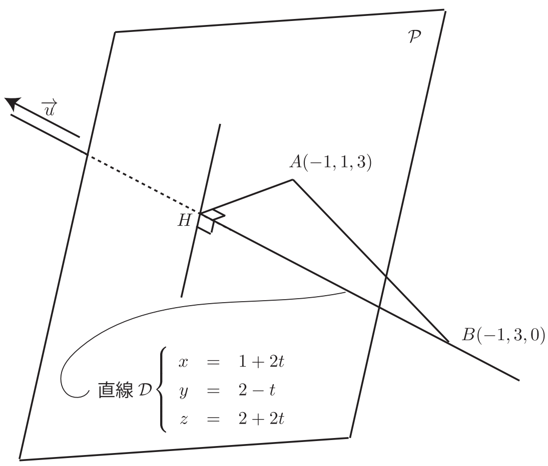
問題 1 ；指数関数、数列。問題 2 ：空間の幾何。問題 3 ；確率。問題 4 ; 実数関数。

(3) 問題４を「多岐一選」方式にしている。
従来からある特徴
(4) 数理科学の側面を問題１；薬剤の血中濃度問題，問題３；企業内技術取得問題
(5) 計算機を使える。
(6) 基本を問う姿勢がしっかりして、技巧的または「ひねた」問題はない。
(7) 証明問題が主流、求値問題もあるが計算機を使用させる。
という特徴がある。
問題１ A
薬剤を錠剤の形で患者が吸収することからなっている。患者の血液中の薬剤存在量は mg 単位で検査すると、区間 [０；10] で次のように定義された関数としてモデル化されている。

$$f(t) = 3\,t\,e^{-0.5t+1}$$

ここで、t は錠剤服用後からの経過時間を時間単位で表している。
　このとき、$f(t)$ を微分し、変化を調べ、最大値を求める。
また、$f(t) = 5$ の区間 $[0, 2]$ と $[2, 10]$ での解を求め、$f(t) \geqq 5$ となる範囲を求める。
問題１ B
静脈に最初、薬剤量 2mg を注射して、１時間毎に 1.8mg 量の薬剤をさらに注射する。薬剤は血中で直ぐに拡散し、段階的に除去されると考えられている。注射してから１時間経過すると、薬剤の血中濃度は注射直後の濃度の 30 ％が減少すると推測される。この状況を数列 $\{u_n\}$ でモデル化する。n は全ての自然数であり、u_n は、注射後 n 時間経過したときの患者の血液中の薬剤量を mg 単位で表したものである。$u_0 = 2$ である。
　このとき、u_n が漸化式 $u_{n+1} = 0.7u_n + 1.8$ をみたすことを証明し、$u_n \leqq u_{n+1} < 6$ を数学的帰納法で証明する。$l = \lim_{n\to\infty} \quad u_n$ が何を意味するか解釈し、一般項 u_n を求める。薬剤の血中濃度が 5.5mg 以上になったら注射を止めることにしたばあい、注射の回数は何回になるかを計算する。
問題２

題２（７点）主題は空間幾何
直交座標 (O ;$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) で記述されている空間の中にある次のものを考察する。
　右の図のように、点 B を通る直線 $\mathcal{D}$ と直線外の点 A がある。平面 $\mathcal{P}$ は点 A を通り直線 $\mathcal{D}$ と直交している。点 A, B の座標や直線 $\mathcal{D}$ の方程式は図に示してあるとおりである。また、$\overrightarrow{u}$ は直線 $\mathcal{D}$ の方向ベクトルである。
　このとき、内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}$、直線 $\mathcal{D}$ と平面 $\mathcal{P}$ の交点 H の座標、線分 AH の長さを求めることを課題とする。また、一般的ではないと思われる方法で、点 H の座標を、誘導にしたがって求めることを課題とする。さらに、平面 $\mathcal{P}$ 上に、点 C をとり、四面体 $ABCH$ の面積を $\dfrac{8}{9}$ とするときの、三角形 ABC の面積を求めることを課題としている。
　これは、ほぼ一般的な空間ベクトルの課題であり、日本の共通テスト、あるいは、センター試験の問題とも類似の問題である。



問題３　主題は確率

ある大企業の経営者が従業員集団に新しいソフトウエア使用のための講習会を提案した。この講習には、従業員の 25 %が参加している。この企業では、従業員の 52 %が女性であり、その内の 40 %がこの講習に参加している。この企業の従業員を無作為に選んで質問をして、以下の事象を考察する。
このとき、
F : 質問を受ける従業員が女性である。
S : 質問を受ける従業員が講習に参加している。
このとき、$p(S), p(S \cap F), p_s(F)$ などを求め、$p_{\overline{F}}(S) < 0.1$ は正しいかどうかの議論をすることを求めている。
また、無作為に抽出した 20 人の標本中で、講習に参加している人数を確率変数 X とする。このとき、Pyson（パイソン）によるプログラム

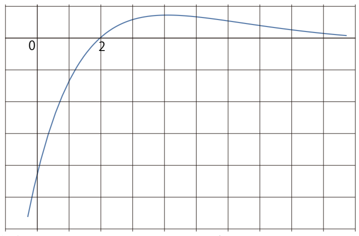
```
def proba(k)
    P=0
    for i in range(0,k+1)
        P=P+binomiale(i, 20, 0.25)
    return P
```

を読ませて、解釈させたうえで、
20 人の標本中少なくとも 6 人の従業員が講習に参加している確率を求めさせている。
さらにおもしろいのは、次の問題である。

> この講習には、従業員の 25 %が参加している。講習参加奨励のために、企業は講習参加従業員の給与を 5 %あげる、参加していない従業員 の給与は 2 %しか上げないことを決めた。 この条件で、この企業の従業員の平均給与上昇百分率はいくらか?

この場合、従業員間に給与差があるかないかは条件では示していない。
従業員間に給与差のあるグループがあり、そのグループ間においては講習参加率が同一でない場合には、この平均給与上昇百分率は決定しないのである。
「平均給与」百分率といっているのだから、給与間に差があることはおそらく前提されていると思われる。しかし、「従業員の 25 %が参加している」という表現には、給与差のあるすべてのグループで、講習参加率が同一であることは前提とされていないとみるのが普通だろう。すると、出題者は、「平均給与上昇百分率はいくらか?」と問い、「この百分率は決定しない」と答えることを期待していると思われる。とすると、この問題の質は、相当レベルが高いと思われる。
さらにおもしろいことに、バカロレア 2022 の解答を発表している出題当局ではない団体のいくつもが、異なる給与従業員グループ間ですべて、同一の 25 %講習参加率を前提として、「平均給与上昇百分率＝ 2.75 %に確定」という解答を作成し、ホームページ上で世界に発信している。

問題 4　主題は数値関数
問題 4 は多肢選択問題で、日本のセンター試験問題とも類似した面がある。
扱う内容は、$f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ の漸近線、$f(x) = xe^{x^2}$ の原始関数、$f(x) = 3e^{-x^2}+2$ の原始関数の増減、$f(x) = \dfrac{2\ell nx}{3x^2+1}$ の $x \to \infty$ における極限値、$e^{2x}+e^x-12=0$ の実数解の個数などであり、日本の大学入試の数 III の問題と同類と思われる。
少し変わっているのは、次のように導関数のグラフを示し、原始関数の凹凸を聞いていることである。
しかも、選択肢は、



$a.$ $]0, +\infty[$ で下に凹である。
$b.$ $]0, +\infty[$ で下に凸である。
$c.$ $[0, 2]$ で下に凸である。
$d.$ $[2, +\infty[$ で下に凸である。

の 4 つである。グラフは $[0, 4]$ で増加しているように見えるので、これは少し、引っかけ問題のような気もする。

5「巨大数のつくり方　～アッカーマン数とグラハム数～」　　　　真鍋　和弘

本レポートは 20 世紀初頭のヒルベルトによる有限の立場による数学の基礎づけの提起に伴い、有限と無限の間に存在する人間には到達不可能とも思える巨大数についての考察である。有限の範囲に無限とも思える巨大な数が手触りとともに感じられる報告であった。

塵劫記には大数の名として、一、十、百、千、万、億、兆、京、垓、秭、穣、溝、澗、正、載、極、恒河沙、阿僧祇、那由他、不可思議、無量大数とある。不可思議は 10^{68}（あるいは 10^{88}）という大きな数であることを紹介すると、高校生であっても、興味を持つという。

1 不可思議 $= 10^{68}$

しかし、コンピュータに詳しい生徒なら、インターネット検索を開発した Google の社名が googol(グーゴル) に由来することを知っている。

1googol$= 10^{100}$

である。

アッカーマン関数はもっと大な数がすぐに作ることができる関数で、アッカーマン数、グラハム数はとても大きな数である。

この大きな数を表す記号として、クヌースの矢印表記がある。

べき乗を表すのに $\wedge$ 記号がある。$2^2 = 4$ を $2 \wedge 2$、$2^3 = 8$ を $2 \wedge 3$、一般に $a^b = a \wedge b$ と表す記号である。

この記号を使うと、

$$10^{10^{10}} = 10^{(10^{10})} = 10 \wedge 10 \wedge 10$$

と表される。

少し気をつけることは、これは、

$$(10^{10})^{10} = 10^{10} \times 10^{10} \times \cdots \times 10^{10} (10\text{ 回かけ算}) = 10^{100}$$

とは違って、

$$10^{10^{10}} = 10^{(10^{10})} = 10^{10000000000}$$

となり、かなり大きな数となることである。

クヌースの矢印記号は、$x \wedge y$ を $x \uparrow y$ と表す。つまり、

$$x \uparrow y = x \wedge y$$

である。

さらに、

$$x \uparrow\uparrow y = x \uparrow x \uparrow \cdots \uparrow x \ (y\ times)$$

$$x \uparrow\uparrow\uparrow y = x \uparrow\uparrow x \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow x \ (y\ times)$$

と定義する。

すると、$\uparrow$ が増えるごとに値は急激に巨大化する。

$$\begin{array}{rclclclcl}
2 \uparrow 2 & = & 2^2 & = & 4 & & (\text{注 } 1) & & \\
2 \uparrow 3 & = & 2^3 & = & 8 & & & & \\
2 \uparrow\uparrow 3 & = & 2 \uparrow (2 \uparrow 2) & = & 2 \uparrow 4 & = & 2^4 & = & 16 \\
2 \uparrow\uparrow 4 & = & 2 \uparrow (2 \uparrow 2 \uparrow 2) & = & 2 \uparrow 16 & = & 2^{16} & = & 65536 \\
3 \uparrow\uparrow 3 & = & 3 \uparrow 3 \uparrow 3 & = & 3^{27} & = & 7625597484987 & &
\end{array}$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow 7625597484987 = 3 \uparrow 3 \uparrow \cdots \uparrow 3 \ (7625597484987\ times).(\text{注 } 2)$$

(注 1) $2\uparrow 2 = 2\uparrow\uparrow 2 = 2\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 2\uparrow\uparrow\cdots\uparrow 2 = 4$ となる。

(注 2) $G(3) = 3\uparrow\uparrow\uparrow 3$ はトリトリと呼ばれる巨大数である。後でグラハム数を計算する時に出てくる。

$\uparrow$ を何回も書くのは大変なので、$\uparrow^n = \uparrow\uparrow\cdots\uparrow\,(n\ times)$ と書くこととする。

アッカーマン関数は、2 変数の関数 $A(x,y)$ で表すことができ、

$$A(0,y) = y+1 \tag{1}$$
$$A(x+1,0) = A(x,1) \tag{2}$$
$$A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y)) \tag{3}$$

という規則で表される。

すると、

$A(1,y) = y+2$　(3) で $x=0$ として得られる漸化式を使って示すことができる。

$A(2,y) = 2y+3$　(3) で $x=1$ とする。

$A(3,y) = 2^{y+3}-3$　(3) で $x=2$ とする。

$A(4,y) = 2\uparrow\uparrow(y+3)-3$　(3) で $x=3$ とする。

$A(x,y) = 2\uparrow^{x-2}(y+3)-3 (x \geqq 3)$

となり、$A(n,n)$ タイプの数をアッカーマン数と名づけると、

$$\begin{aligned}
A(0,0) &= 1,\\
A(1,1) &= 3,\\
A(2,2) &= 2\cdot 2+3 = 7,\\
A(3,3) &= 2^6-3 = 64-3 = 61,\\
A(4,4) &= 2\uparrow\uparrow 7-3 = 2\uparrow 2\uparrow 2\uparrow 2\uparrow 2\uparrow 2\uparrow 2-3 = 2\uparrow 2\uparrow 2\uparrow 2\uparrow 16-3\\
&= 2\uparrow 2\uparrow 2\uparrow 216-3\\
&= 2\uparrow 2\uparrow 2\uparrow 65536-3\\
&= 2\uparrow 2\uparrow 2^{65536}-3,\\
A(5,5) &= 2\uparrow\uparrow\uparrow 8-3\\
&= 2\uparrow\uparrow 2\uparrow\uparrow 2\uparrow\uparrow 2\uparrow\uparrow 2\uparrow\uparrow 2\uparrow\uparrow 2\uparrow\uparrow 2-3,\\
\cdots &= \cdots\\
A(n,n) &= 2\uparrow^{n-2}(n+3)-3.\ (n \geqq 3)
\end{aligned}$$

などとなる。

n が 4 以上では、実際に計算しようとしても、とても太刀打ちできないほど大きくなる。

グラハム数 $G^{64}(4)$ はもう少し大きな数となる。

$G(x)$ を次のように定義する。

$$G(x) = 3\uparrow^x 3$$

グラハム数とは、$x=4$ に対して $G(x) = 3\uparrow^x 3$ を 64 回繰り返した次の数のことである。

$$G^{64}(4) = G(G(\cdots(G(4))\cdots))$$

グラハム数 $G^{64}(4)$ は実際には計算できないほど大きな数だが、とりあえず $G(4)$ までの値を求めてみる。

$$
\begin{aligned}
G(1) &= 3 \uparrow 3 = 27, \\
G(2) &= 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow (3 \uparrow 3) = 3 \uparrow G(1) = 3 \uparrow 27 = 7625597484987 \\
G(3) &= 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) \\
&= 3 \uparrow\uparrow G(2) = 3 \uparrow\uparrow 7625597484987, (\text{トリトリ}) \\
G(4) &= 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3) \\
&= 3 \uparrow\uparrow\uparrow G(3) = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 \cdots 3 \uparrow\uparrow 3 (G(3)\ times) \\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

これを 64 回繰り返した数はいったいどんな大きな数なのか、これから先はとても計算できそうにない。まったく想像を絶する大きさである。

ここで紹介した巨大数は、すべてチューリングが提唱した計算可能な関数 (または数) と呼ばれるものである。計算可能な数とは、無限の時間があれば、いつかはコンピュータが答えを出してくれる数のこと。巨大数といっても有限の数なので、無限の数から見れば、 ほとんど無視できる数である。

計算可能な数の先には計算不可能な数の世界が存在する。ここから先はゲーデルの定理 (不完全性定理) が支配する世界である。19 世紀の終わりに、デデキントやカントールが 始めた集合論は、人間にこれまで不可能だと思われていた無限を扱う技法を教えてくれた。

このことをきちんと認識した最初の数学者はヒルベルトでである。 ここでは触れなかったが、無限順序数を取り入れた巨大数の理論も存在する。

数学基礎論や数理論理学とともに大きく発展した巨大数の理論は、やがて 21 世紀以降の数学やコンピュータ科学にこれからも大きな影響を与えていくであろう。例えば、いま数学上の大問題と言われている計算量に関する「$P \neq NP$ 問題」とも関係する。

巨大数の理論は数学者ばかりでなく、数学好きのオタクやアマチュアにも結構楽しめる題材である。これからの学校数学にもきっと採り入れられてくると思われる。

6「四元数とベクトル解析　～ベクトル積の導入からロドリゲスの公式へ～」　　成田　収

このレポートはユークリッド幾何学における回転運動の重要性と、それを実現するために四元数から抽出されたベクトル積の重要性などについて考察したものである。この中で、高校で扱われる「ベクトル解析」はアメリカの物理学者ギッブスが 1881 年に提唱したのが最初であるという歴史も明らかにされている。

複素数（2 元数）が平面の幾何学を代数的に扱う手段を与えることは、ガウスによって明らかにされた (1800 年台初め)。3 次元空有間の幾何学を扱う 3 元数を研究していたハミルトン（ウィリアム・ローワン・ハミルトン、アイルランドの数学者）は、あるとき、3 元数では 3 次元空間を扱うことは不可能だが、4 元数を構成することによって可能となることにあるとき気がついた（1843 年）。

その後、ハミルトンは 4 元数によって 3 次元空間の幾何学、物理学を記述する研究に没頭した。今でも、イギリスでは、4 元数の研究が引き続き行われているという。

しかし、それまで人類が慣れ親しんできた、整数や有理数、実数、複素数と違い、4 元数は、かけ算が非可換で人の手による計算は複雑困難であった。

4 元数は虚数単位を i, j, k とし、それらの性質を $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$ として、$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, x_0, x_1, x_2, x_3は実数 と表される数である。
このとき、$\widehat{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k, \widehat{y} = y_1 i + y_2 j + y_3 k$ のような数を純虚数という。この積を計算すると

$$\widehat{x}\widehat{y} = -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)i + (x_3y_1 - x_1y_3)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k$$

となり、実数部分には内積、虚数部分にはベクトル積（外積）が現れる。

これを、分離して取り出し、ベクトル解析を作り上げたのが、ジョサイア・ウィラード・ギブズ（Josiah Willard Gibbs, 1839-1903　アメリカの数学者・物理学者・物理化学者）である。1881 年から 1884 年にかけてのことである。

ギブスの構成したベクトル解析では、ベクトル積は、ベクトル $\boldsymbol{a}$ にも $\boldsymbol{b}$ にも直交する空間を考え、その中で、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ回転する右ねじが進む方向を持ち、$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ で作られる平行四辺形と同じ大きさを持つものとして、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が定義される。（2 次元の場合は、ベクトル $\boldsymbol{a}$ にも $\boldsymbol{b}$ にも直交する空間が存在しないため、0 次元のもの、すなわちスカラーを考えることになる。）　しかし、次元に関わらず、ベクトル積は
(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
(b) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$
という性質を満たす。(a)(b) から $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ が得られる。
（この第 2 の性質は、定義から直接証明されるが、3 次元空間で、この性質を幾何学的に証明するには、多少の手間がかかる。しかし、それさえ、乗り越えれば、3 次元空間の幾何学や運動を自由に記述することができる。）

この性質から、$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_1 + x_1\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_1$ とすると、すぐに、

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\boldsymbol{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\boldsymbol{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{e}_3$$

が得られる。（2 次元の場合は $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = x_1y_2 - x_2y_1$）

ベクトル空間であるから、平行移動、鏡映は簡単に表現できる。さらに、このベクトル積の入った空間では、回転も比較的簡単に表現できる。つまり、クラインがエルランゲンプログラムで提唱したように、幾何学とは、ある変換群によって不変な性質を研究することであり、ユークリッド空間の幾何学の場合は、その変換群は合同群のことである。合同群とは平行移動、鏡映運動、回転運動からなる群である。つまり、この 3 つの運動は、ユークリッド幾何学を特徴づける運動である。これらが、自由に記述できることは、ユークリッド幾何学を自由に扱うための条件となるため、3 次元空間の回転を表現する技術は重要である。

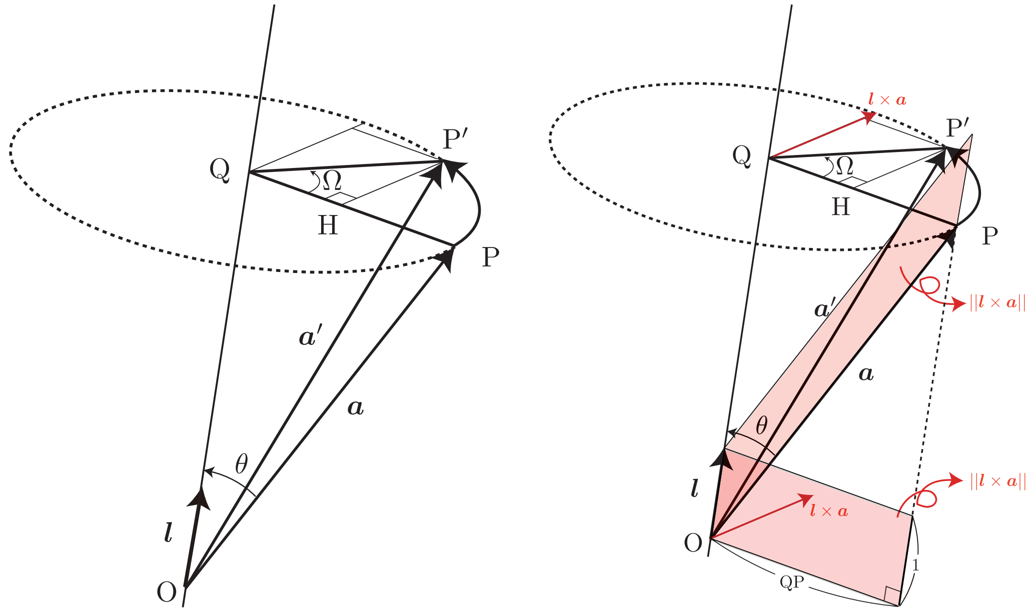
では、どのように表現できるのかをみてみる。

3.0.1 回転：ロドリゲスの公式

ベクトル $\boldsymbol{a}$ を単位ベクトル $\boldsymbol{l}$ の方向の直線 l の周りに角度 Ω だけ回転したものを $\boldsymbol{a}'$ とする。

直線 l を回転軸、Ω を回転角という。右ねじ回りを正、左ねじ回りを負とする。

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ はどこにあってもよいが、説明の都合上始点が原点に一致しているものとし、終点をそれぞれ P, P' とする。P' から l に下ろした垂線の足を Q とし、P' から線分 PQ に下ろした垂線の足を H とする。



すると、

$$\boldsymbol{a}' = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QH} + \overrightarrow{HP} \tag{4}$$

なので、$\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{QH}$, $\overrightarrow{HP}$ を求める。

(a) $\overrightarrow{OQ}$ は $\boldsymbol{a}$ の l への正射影なので、

$$\overrightarrow{OQ} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{l} \tag{5}$$

(b) $\overrightarrow{QH}$ について

$\overrightarrow{QP} = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{l}$

であり、$\overrightarrow{QH}$ は $\overrightarrow{QP'}$ の $\overrightarrow{QP}$ 方向への射影なので

$$\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QP} \cos\Omega = \{\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{l}\} \cos\Omega \tag{6}$$

(c) $\overrightarrow{HP'}$ について

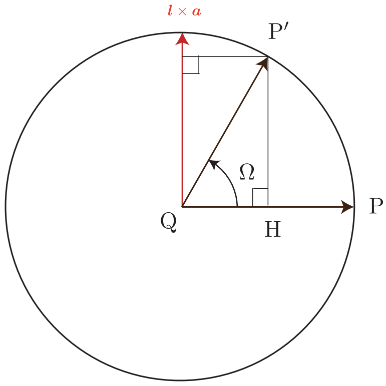
上の右の図で見るように、$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{a}$ でつくる平行四辺形の面積は $\boldsymbol{l}$ と $\overrightarrow{QP}$ で作る平行四辺形の面積は等しい。$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{a}$ と $\overrightarrow{QP}$ は同一平面上にあるので、なす角の向きを含めて考えて

$$\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{l} \times \overrightarrow{QP}$$

であり、この大きさは $\overline{\mathrm{QP}}$ に等しい。

つまり、$\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a}$ は $\overrightarrow{QP}$ に垂直で大きさが $|\overrightarrow{QP}|$ に等しく $\overrightarrow{QP}$ が Ω 回転する回転面に乗っているベクトルである。

したがって、$\boldsymbol{l}$ 方向の真上から見ると、下図のようになっている。



したがって、

$$\overrightarrow{HP'} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a} \sin \Omega \tag{7}$$

となる。

(5)(6)(7) を (4) に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}' &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{l} + \{\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{l}\} \cos \Omega + \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a} \sin \Omega \\ &= \boldsymbol{a} \cos \Omega + \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a} \sin \Omega + (1 - \cos \Omega)(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{l} \end{aligned} \tag{8}$$

これを、ロドリゲスの式 (Rodrigues formula) という。